

20. Obtain a Fourier series for $F(x) = x \sin x$ in $0 < x < 2\pi$.

$0 < x < 2\pi$ ல் $F(x) = x \sin x$ க்கு பூரியர் தொடரைக் காண்க.

NOVEMBER/DECEMBER 2023

**CMA41 — VECTOR ANALYSIS AND
FOURIER SERIES**

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL the questions.

1. If $\vec{A} = 5\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ and $\vec{B} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, prove that $\vec{A}$ and $\vec{B}$ are perpendicular.

$\vec{A} = 5\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ மற்றும் $\vec{B} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ எனில் $\vec{A}$, $\vec{B}$ செங்குத்தானவை என நிரூபி.

2. If $\vec{r} = \vec{a}e^{ut} + \vec{b}e^{-ut}$, show that $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \omega^2\vec{r} = 0$, $\vec{a}$ and $\vec{b}$ being constant vectors.

$\vec{a}, \vec{b}$ ஆகியவைகள் மாறிலிகள் என்றவாறு $\vec{r} = \vec{a}e^{ut} + \vec{b}e^{-ut}$ எனில் $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \omega^2\vec{r} = 0$ எனக் காண்பி.

3. If $\phi = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2 + z^2)$ then find $\text{div} \phi$.

$\phi = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2 + z^2)$ எனில் $\text{div} \phi$ காண்க.

4. Determine the constant 'a' so that the vector $\vec{F} = (x+3y)\vec{i} + (y-2z)\vec{j} + (x+az)\vec{k}$ is solenoidal.

$\vec{F} = (x+3y)\vec{i} + (y-2z)\vec{j} + (x+az)\vec{k}$ என்ற வெக்டர் பாய்வற்றதாக இருந்தால் மாறிலி 'a' ஐ தீர்மானி.

5. If $\vec{F}$ is a conservative field and C is any simple closed curve find $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

$\vec{F}$ ஒரு விசைக் காப்புக்களம் மற்றும் C ஒரு எளிய மூடிய வளைவரை எனில் $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ மதிப்பு காண்க.

6. Define work done by a force.

ஒரு விசை செய்யும் வேலையை வரையறுக்க.

7. Prove that $\text{div curl } \vec{F} = 0$.

$\text{div curl } \vec{F} = 0$ என நிறுவுக.

8. State Green's theorem.

கிரீனின் தேற்றத்தை கூறுக.

17. If $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ prove that

(a) $\nabla r = \frac{\vec{r}}{r}$,

(b) $\nabla r^n = nr^{n-2} \vec{r}$, where $r = |\vec{r}|$.

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ எனில்

(அ) $\nabla r = \frac{\vec{r}}{r}$

(ஆ) $\nabla r^n = nr^{n-2} \vec{r}$ என நிரூபி, இங்கு $r = |\vec{r}|$.

18. Find the total work done in moving a particle in a force field given by $\vec{F} = 3xy\vec{i} - 5z\vec{j} + 10x\vec{k}$ along the curve $x = t^2 + 1, y = 2t^2, z = t^3$ from $t = 1$ to $t = 2$.

$\vec{F} = 3xy\vec{i} - 5z\vec{j} + 10x\vec{k}$ என்ற விசை ஒரு துகளை $x = t^2 + 1, y = 2t^2, z = t^3$ $t = 1$ என்ற வளைவரை வழியாக முதல் $t = 2$ வரை நகர்த்தினால் செய்யப்படும் வேலையைக் காண்க.

19. Verify Green's theorem for

$\int_C [(x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy]$ where C is the square with vertices $(0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)$.

$(0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)$ என்பதை முனைகளாகக் கொண்ட சதுரம் C எனில் $\int_C [(x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy]$ க்கு கிரீன்ஸ் தேற்றத்தை சரிபார்க்க.



15. (a) Find the Fourier series for $F(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$ in $(0, 2\pi)$.

$F(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$ -ன் $(0, 2\pi)$ -ல் ஃபூரியர் தொடரை கண்டுபிடி.

Or

- (b) Use Parseval's identity to show that

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)}$$

பார்சவல் சமன்பாட்டை பயன்படுத்தி

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)} \text{ எனக் காண்பி.}$$

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. A particle moves along the curve $x = 2t^2, y = t^2 - 4t, z = 3t - 5$, where t is the time. Find the components of its velocity at time $t = 1$ in the direction $\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

ஒரு துகள் $x = 2t^2, y = t^2 - 4t, z = 3t - 5$ என்ற வளைவரையில் நகர்கிறது t என்பது நேரம் எனில் $t = 1$ ஆக இரக்கும் போது $\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ திசையில் துகளின் திசைவேகத்தின் கூறு காண்க.

9. Write any two condition for the Fourier series converges.

பூரியர் தொடரின் குவிக்கான ஏதேனும் இரண்டு கட்டளைகளை எழுதுக.

10. Define half range sine and cosine Fourier series. அரைவீச்சு சைன் மற்றும் கொசைன் பூரியர் தொடர்களை வரையறு.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL the questions.

11. (a) Find the velocity and acceleration of a particle which moves along the curve $x = 2 \sin 3t, y = 2 \cos 3t, z = 8t$.
 $x = 2 \sin 3t, y = 2 \cos 3t, z = 8t$ என்ற வளைவரையின் மீது நகரும் துகளின் திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

Or

- (b) If $\vec{r} = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + at \tan \alpha \vec{k}$, then find

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right|$$

$\vec{r} = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + at \tan \alpha \vec{k}$ எனில்

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right| \text{ காண்க.}$$

12. (a) Find the directional derivative of $\phi = xy^2 + yz^3$ at $(2, -1, 1)$ in the direction of $\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

$\phi = xy^2 + yz^3$ க்கு $\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ என்ற திசையில் $(2, -1, 1)$ என்ற புள்ளியிடத்து திசைவகை கெழு காண்க.

Or

- (b) If $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, then find $\nabla \cdot \vec{F}$ and $\nabla \times \vec{F}$
 $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, எனில் $\nabla \cdot \vec{F}$ மற்றும் $\nabla \times \vec{F}$ இவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

13. (a) Evaluate $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ where C is the portion of the parabola $y = x^2$ in the xy plane from $A(0, 0)$ to $B(1, 1)$ and $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^3\vec{j}$.

C என்பது xy தளத்தில் $A(0, 0)$ லிருந்து $B(1, 1)$ வரையிலான பரவளையத்தின் $y = x^2$ ஐ பொறுத்து $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^3\vec{j}$ க்கான $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ன் மதிப்பைக் காண்.

Or

- (b) If $\vec{F} = (2x^2 - 3z)\vec{i} - 2xy\vec{j} - 4x\vec{k}$, then evaluate $\iiint_V \nabla \times \vec{F} dv$, where V is the region bounded

by $x = 0, y = 0, z = 0$ and $2x + 2y + z = 4$.

$\vec{F} = (2x^2 - 3z)\vec{i} - 2xy\vec{j} - 4x\vec{k}$ எனில்

$\iiint_V \nabla \times \vec{F} dv$ ஐ மதிப்பிடவும், இங்கு V என்பது

$x = 0, y = 0, z = 0$ மற்றும் $2x + 2y + z = 4$ ஆல் எல்லைப்படுத்தப்பட்ட பகுதி.

14. (a) Verify divergence theorem for $\vec{F} = 4xz\vec{i} + y^2\vec{j} + yz\vec{k}$ taken over the cube bounded by the planes $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$.
 $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ எனும் தளங்களால் அடைபடும் கனசதுரம் மேலும் $\vec{F} = 4xz\vec{i} + y^2\vec{j} + yz\vec{k}$ எனில் பாய்வு தேற்றத்தை சரிபார்க்க.

Or

- (b) Use Green's theorem, evaluate $\int_C (x^2 + xy)dx + (x^2 + y^2)dy$ where C is the square formed by $y = \pm 1, x = \pm 1$.

கிரீன் C தேற்றம் மூலம் $\int_C (x^2 + xy)dx + (x^2 + y^2)dy$ -ஐ மதிப்பிடுக.

C இங்கு C என்பது $y = \pm 1, x = \pm 1$ -ஐ அடைக்கப்பட்ட சதுரமாகும்.

